g étant une fonction rationnelle, g est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}-\{-2\}$ en particulier sur $]-2,+\infty[$

Donc g admet une unique primitive G Vérifiant $G(-1)=0$ sur $]-2,+\infty[$.

On a :

$$G(x)=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x+2)+cte.$$

Or $G(-1)=0$ et $G(-1)=\frac{1}{2}-2+cte=-\frac{3}{2}+cte$

$$\Rightarrow cte=\frac{3}{2}$$

D'où $G(x)=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x+2)+\frac{3}{2}$

2) $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{\alpha}{(x+1)^2}+\frac{\beta}{x+1}$

$$=\frac{\alpha+\beta(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{\alpha+\beta+\beta x}{(x+1)^2}$$

Par identification : $\begin{cases}\beta=1\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$

$\Rightarrow \alpha=-\beta$ et $\beta=1$

D'où $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$

Pour $x>-1$ on a :

$$F(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)+cte$$

$F(0)=1+cte=0\Rightarrow cte=-1$

Donc $F(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)-1$

Exercice 5

a)

$\ln(2x-1)=0\Leftrightarrow 2x-1=1\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$

Donc $S=\{1\}$

b)

$\ln(2x+1)-1=0\Leftrightarrow \ln(2x+1)=1\Leftrightarrow 2x+1=e$

$\Leftrightarrow 2x=e-1\Leftrightarrow x=\frac{e-1}{2}$

Donc $S=\left\{\frac{e-1}{2}\right\}$

c)

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)+\ln 2=\ln\left(\frac{7}{4-x}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+2}{2-x}\right)=\ln\left(\frac{7}{4-x}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2x+2}{2-x}=\frac{7}{4-x}\Leftrightarrow (2x+2)(4-x)-7(2-x)=0$

$\Leftrightarrow -2x^2+13x-6=0$

$\Delta=169-48=121=11^2$

$\Rightarrow x'=\frac{13+11}{-4}=-6,\ x''=\frac{13-11}{-4}=-\frac{1}{2}\ ;x\in]-1,2[$

Or $-6\notin]-1,2[$ et $\frac{-1}{2}\in]-1,2[$

$$S=\left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

d) $\ln^2 x-3\ln x-4=0$ (E). Posons $X=\ln x$

(E) est équivalente à : $\begin{cases}X^2-3X-4=0\\ X=\ln x\end{cases}$

$X^2-3X-4=0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} X'=-1, X''=4$

$\ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ et $\ln x=4\Leftrightarrow x=e^4$

Donc $S=\left\{\frac{1}{e},e^4\right\}$.

e) $\ln|2x+1|=2\ln 2$

$\Rightarrow \ln|2x+1|=\ln 4;\ x\neq-\frac{1}{2}\Rightarrow |2x+1|=4$

$2x+1=4$ ou $2x+1=-4$

$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{-5}{2}$

Donc $S=\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$

f) Pour $x\neq-1$ et $x\neq-2$

$\frac{1}{2}\ln|x+1|=\ln|x+2|$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{|x+1|}=\ln|x+2|$

$\Leftrightarrow \sqrt{|x+1|}=|x+2|$